Continuidad de Una Función

3 1° – 7 febrero	**Unidad I** *Límites y Continuidad*	• Límites trigonométricos • Continuidad.	• Hallar límites utilizando identidades y límites especiales. • Analizar la continuidad de una función en un punto dado, empleando teoremas de continuidad.

Función continua en un punto

Minuto 55

Una función $f(x)$ es *continua* en un punto $x = a$ si y solo si se verifican las siguientes tres condiciones:

1) $f(a)$ existe, i.e. la imagen de a es un número real.
2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es un número real.
3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Discontinuidad en $x = a$:

- Evitable: Si no existe $f(a)$ pero existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es un número real
- Inevitable:
  - De salto finito: límites laterales son números distintos
  - De salto infinito: límite es $\pm\infty$ → $f(x) =$

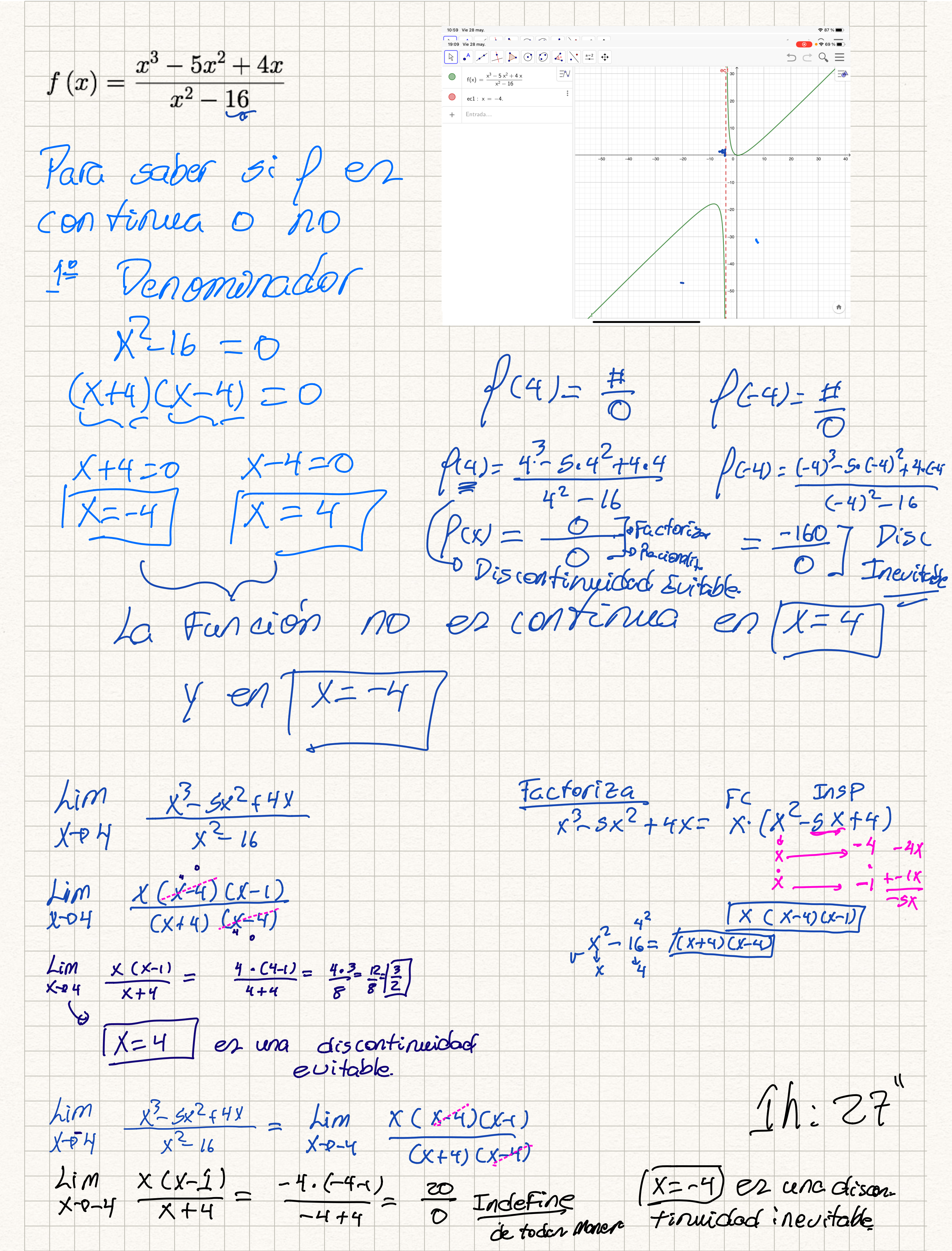
1h:03'

$f(x) = x^2 - 7x + 4$

$g(x) = 2x - 5$

$m(x) = x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 1$

Continuas en $\mathbb{R}$



$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 - 16}$$

Para saber si f es continua o no

1º Denominador

$x^2 - 16 = 0$

$(x+4)(x-4) = 0$

$x+4=0$ → $x=-4$

$x-4=0$ → $x=4$

La función no es continua en $x=4$ y en $x=-4$

$f(4) = \frac{\#}{0}$ $\quad$ $f(-4) = \frac{\#}{0}$

$f(4) = \frac{4^3 - 5\cdot 4^2 + 4\cdot 4}{4^2 - 16}$

$f(x) = \frac{0}{0}$ → Factorizar → Racionalizar → Discontinuidad Evitable

$f(-4) = \frac{(-4)^3 - 5\cdot(-4)^2 + 4\cdot(-4)}{(-4)^2 - 16} = \frac{-160}{0}$ Disc Inevitable

Factoriza

$x^3 - 5x^2 + 4x = x\cdot(x^2 - 5x + 4)$ (FC, Insp)

$x \to -4$: $-4x$

$x \to -1$: $-1x$

$-5x$

$x(x-4)(x-1)$

$x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 - 16}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x(x-4)(x-1)}{(x+4)(x-4)}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x(x-1)}{x+4} = \frac{4\cdot(4-1)}{4+4} = \frac{4\cdot 3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

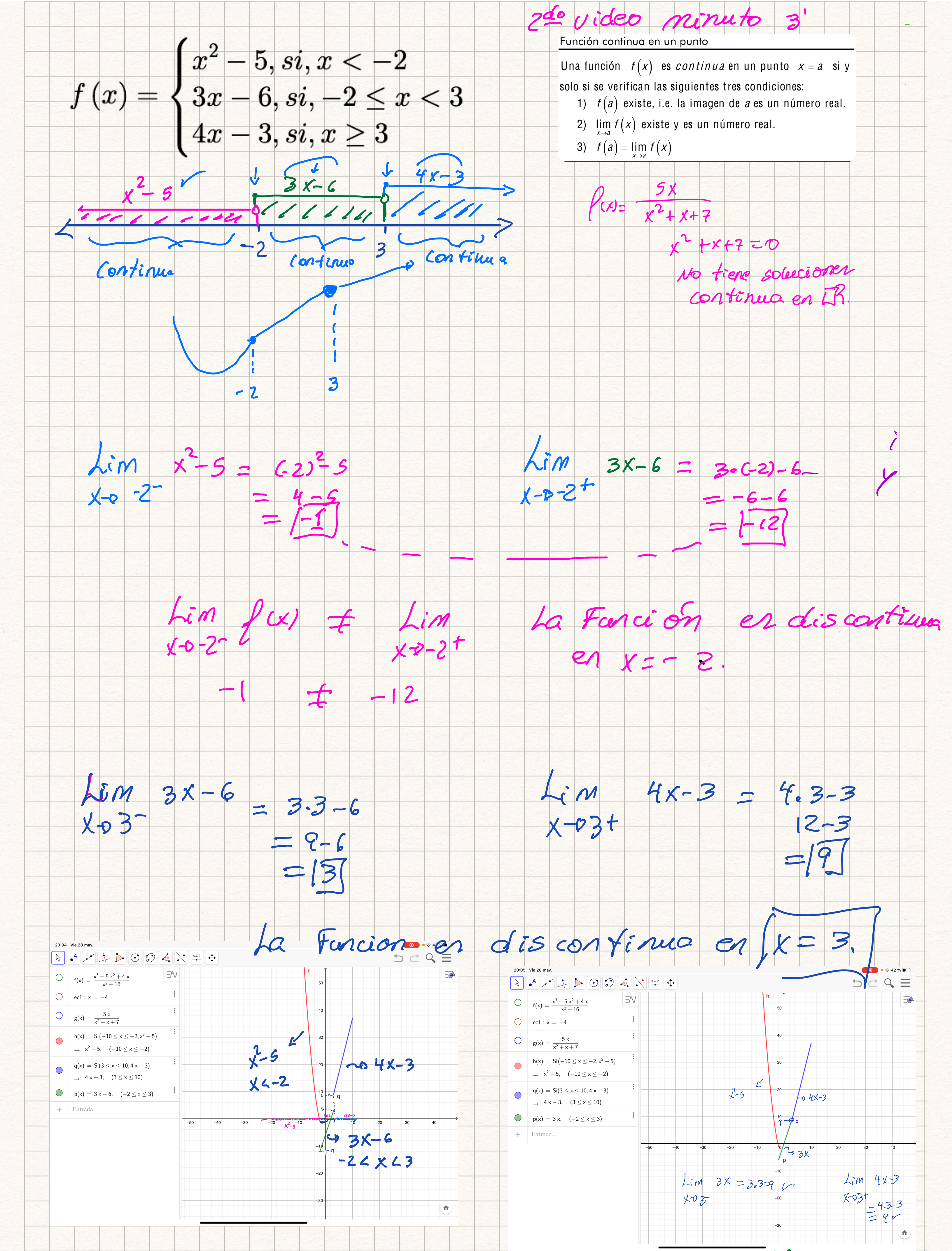
$x=4$ es una discontinuidad evitable.

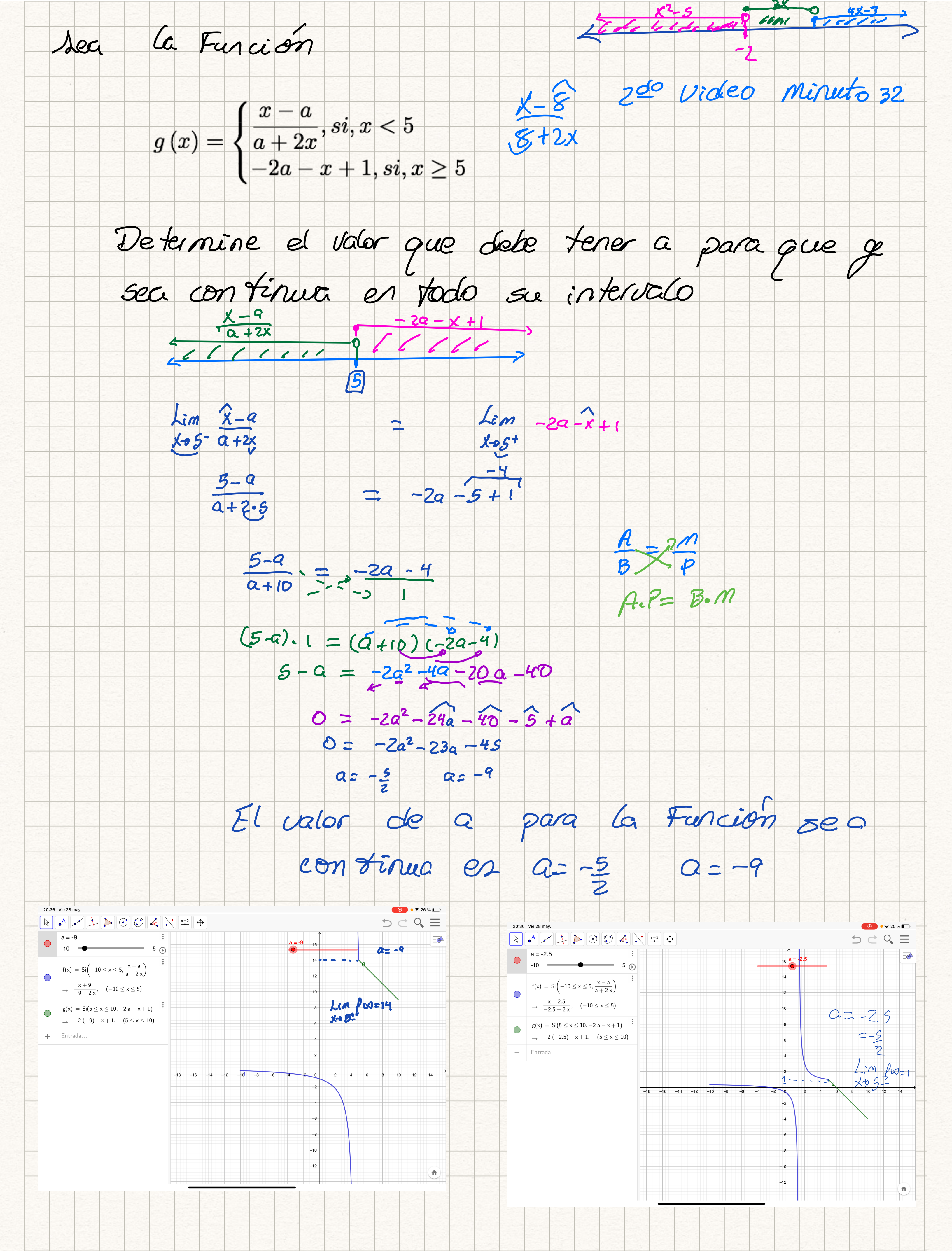
$$\lim_{x\to -4} \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 - 16} = \lim_{x\to -4} \frac{x(x-4)(x-1)}{(x+4)(x-4)}$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{x(x-1)}{x+4} = \frac{-4\cdot(-4-1)}{-4+4} = \frac{20}{0}$$ Indefine de todas maneras

$x=-4$ es una discontinuidad inevitable.

1h: 27"


2do video minuto 3'
Función continua en un punto
Una función $f(x)$ es *continua* en un punto $x = a$ si y solo si se verifican las siguientes tres condiciones:
1) $f(a)$ existe, i.e. la imagen de a es un número real.
2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es un número real.
3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, si, x < -2 \\ 3x - 6, si, -2 \leq x < 3 \\ 4x - 3, si, x \geq 3 \end{cases}$$
$x^2 - 5$
$3x-6$
$4x-3$
-2
3
Continua
Continua
Continua
-2
3
$f(x) = \frac{5x}{x^2+x+7}$
$x^2+x+7=0$
No tiene soluciones
continua en ℝ.
$\lim_{x \to -2^-} x^2-5 = (-2)^2-5 = 4-5 = -1$
$\lim_{x \to -2^+} 3x-6 = 3\cdot(-2)-6 = -6-6 = -12$
¿
y
$\lim_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim_{x \to -2^+}$
$-1 \neq -12$
La Función es discontinua en $x = -2$.
$\lim_{x \to 3^-} 3x-6 = 3\cdot3-6 = 9-6 = 3$
$\lim_{x \to 3^+} 4x-3 = 4\cdot3-3 = 12-3 = 9$
La Funcion es discontinua en $x = 3$.
x^2-5
$x<-2$
$4x-3$
$3x-6$
$-2<x<3$
$\lim_{x \to 3} 3x = 3\cdot3 = 9$
$\lim_{x \to 3^+} 4x-3 = 4\cdot3-3 = 9$



Sea la Función

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{a+2x}, si, x<5\\ -2a-x+1, si, x\geq 5\end{cases}$$

$\dfrac{x-8}{8+2x}$ 2do Video Minuto 32

Determine el valor que debe tener a para que g sea continua en todo su intervalo

$\dfrac{x-a}{a+2x}$ | $-2a-x+1$ | 5

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{x-a}{a+2x} = \lim_{x\to 5^+} -2a-x+1$$

$$\frac{5-a}{a+2\cdot 5} = -2a-5+1$$

$$\frac{5-a}{a+10} = \frac{-2a-4}{1}$$

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{M}{P}$

$A\cdot P = B\cdot M$

$$(5-a)\cdot 1 = (a+10)(-2a-4)$$

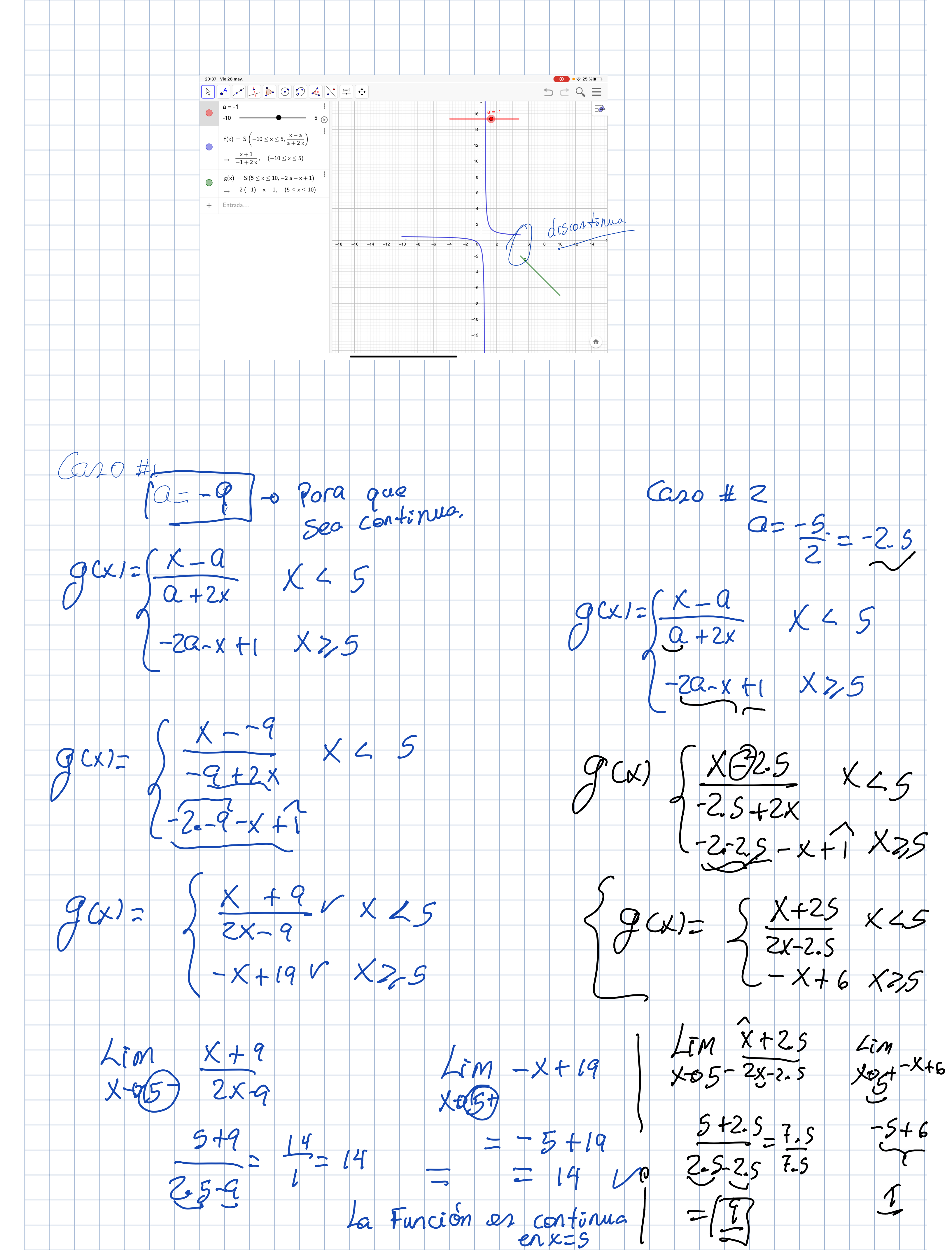
$$5-a = -2a^2-4a-20a-40$$

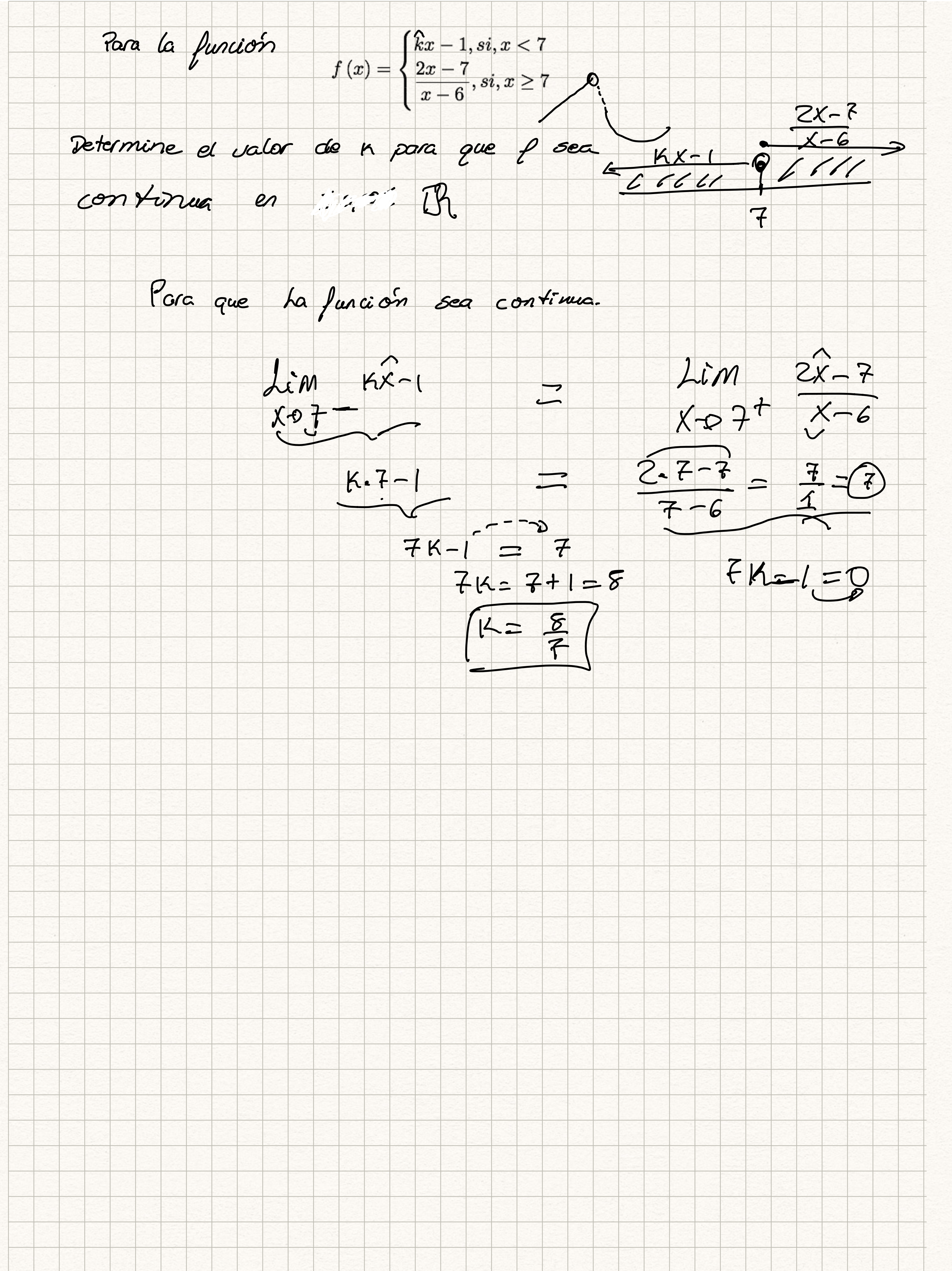
$$0 = -2a^2-24a-40-5+a$$

$$0 = -2a^2-23a-45$$

$a = -\frac{5}{2}$ $a=-9$

El valor de a para la Función sea continua es $a=-\frac{5}{2}$ $a=-9$


discontinua
Caso #1
a = -9 → Para que sea continua.
g(x) = { (x − a)/(a + 2x)   x < 5 ; −2a − x + 1   x ≥ 5
g(x) = { (x − −9)/(−9 + 2x)   x < 5 ; −2·−9 − x + 1
g(x) = { (x + 9)/(2x − 9)   x < 5 ; −x + 19   x ≥ 5
Lim x→5⁻ (x + 9)/(2x − 9)
(5 + 9)/(2·5 − 9) = 14/1 = 14
Lim x→5⁺ −x + 19
= −5 + 19
= 14
La Función es continua en x=5
Caso # 2
a = −5/2 = −2.5
g(x) = { (x − a)/(a + 2x)   x < 5 ; −2a − x + 1   x ≥ 5
g(x) { (x − −2.5)/(−2.5 + 2x)   x < 5 ; −2·−2.5 − x + 1   x ≥ 5
g(x) = { (x + 2.5)/(2x − 2.5)   x < 5 ; −x + 6   x ≥ 5
Lim x→5⁻ (x + 2.5)/(2x − 2.5)
(5 + 2.5)/(2·5 − 2.5) = 7.5/7.5
= 1
Lim x→5⁺ −x + 6
−5 + 6
1



Para la función

$$f(x) = \begin{cases} \hat{k}x - 1, si, x < 7 \\ \dfrac{2x-7}{x-6}, si, x \geq 7 \end{cases}$$

Determine el valor de k para que f sea continua en $\mathbb{R}$

Para que la función sea continua.

$$\lim_{x \to 7^-} k\hat{x} - 1 = \lim_{x \to 7^+} \frac{2\hat{x}-7}{x-6}$$

$$k \cdot 7 - 1 = \frac{2 \cdot 7 - 7}{7-6} = \frac{7}{1} = 7$$

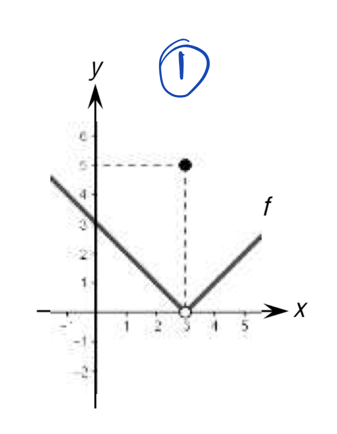
$$7k - 1 = 7$$

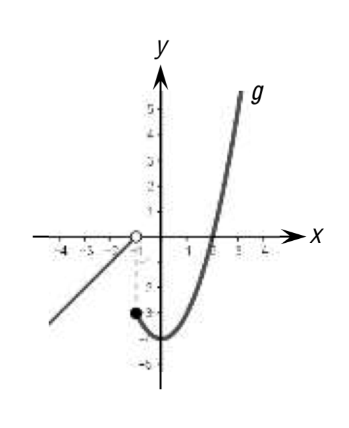
$$7k = 7 + 1 = 8$$

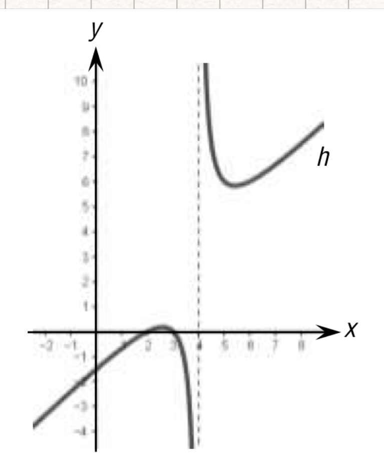
$$k = \frac{8}{7}$$

$7k - 1 = 0$

1 -







$$f(x)=\begin{cases}|3-x| & \text{si } x\neq 3\\ 5 & \text{si } x=3\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<-1\\ x^2-4 & \text{si } x>-1\end{cases}$$

$$h(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-4} = \frac{}{0}$$

4

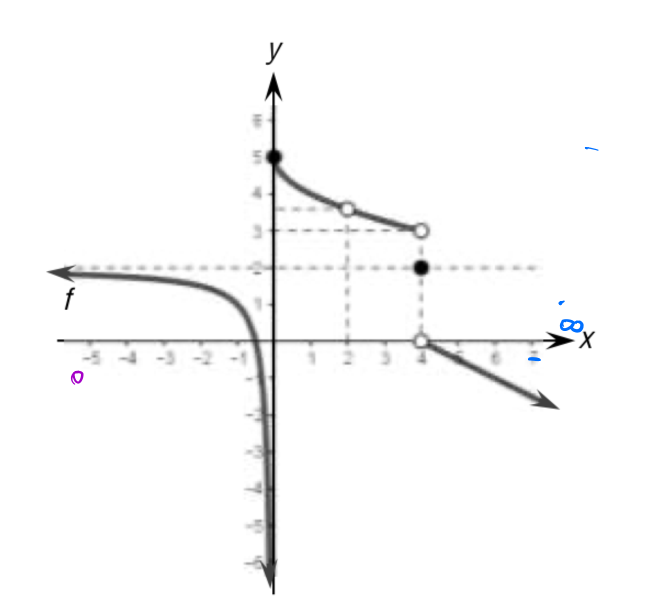
D. Con base en la gráfica de la función *f*, conteste las siguientes preguntas.

1) ¿Cuáles son los intervalos del dominio donde *f* es continua?

2) ¿Cuáles son los valores del dominio donde *f* presenta discontinuidad evitable?

3) ¿Cuáles son los valores del dominio donde *f* presenta discontinuidad inevitable de salto finito?

4) ¿Cuáles son los valores del dominio donde *f* presenta discontinuidad inevitable de salto infinito?



Lista de Ejercicios #6

Tema: Continuidad

A. Para cada una de las siguientes funciones, determine si es o no continua en el valor c especificado. En caso de discontinuidad, especifique si es inevitable o no. Si la discontinuidad es inevitable, determine de qué tipo es, y si por el contrario es evitable, redefina la función para que sea continua.

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+5} & \text{si } x\neq -5\\ 0 & \text{si } x=-5\end{cases};\quad c=-5$

2) $g(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2-4t+3}{t-3} & \text{si } t\neq 3\\ 4 & \text{si } t=3\end{cases};\quad c=3$

3) $h(r)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{r+2}-\sqrt{2}}{r} & \text{si } r\neq 0\\ 2 & \text{si } r=0\end{cases};\quad c=0$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x\neq 5\\ 0 & \text{si } x=5\end{cases};\quad c=5$

5) $f(x)=\begin{cases}x\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases};\quad c=0$

6) $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases};\quad c=0$

7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x\neq 5\\ 0 & \text{si } x=5\end{cases};\quad c=5$

8) $g(x)=\dfrac{x+1}{|x|};\quad c=0$

C. Determine el valor de las constantes *a* y *b* para que las siguientes funciones sean continuas en todo su dominio.

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 2x-a & \text{si } x<-3 \\ ax+b & \text{si } -3\le x\le 3 \\ b-5x & \text{si } x>3 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{si } x<0 \\ b+x^2 & \text{si } 0\le x\le a \\ 7+x & \text{si } x>a \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0\le x\le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & \text{si } x>8 \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} & \text{si } x>a \\ 3x-1 & \text{si } x=a \\ x+3 & \text{si } x<a \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} |3-x| & \text{si } x<7 \\ ax+4 & \text{si } 7\le x<10 \end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{bx^2-5a}{5} & \text{si } x<-1 \\ 3x^2-2x & \text{si } -1\le x\le 2 \\ 4ax^2-b & \text{si } x>2 \end{cases}$

D. Con base en la gráfica de la función *f*, conteste las siguientes preguntas.

1) ¿Cuáles son los intervalos del dominio donde *f* es continua?

2) ¿Cuáles son los valores del dominio donde *f* presenta discontinuidad evitable?

3) ¿Cuáles son los valores del dominio donde *f* presenta discontinuidad inevitable de salto finito?

4) ¿Cuáles son los valores del dominio donde *f* presenta discontinuidad inevitable de salto infinito?

